Phasoren, Frequenzgang und Bodediagramme

Phasoren

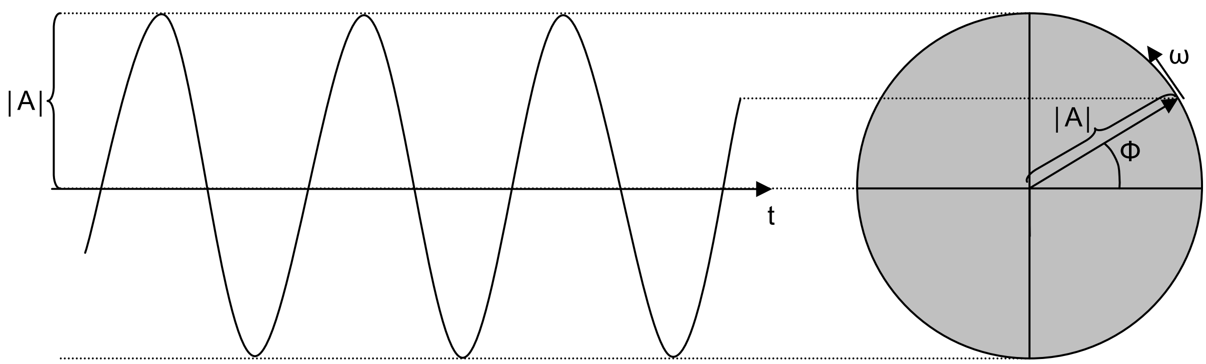
Mit Phasoren (=engl.: „Zeiger") werden **ausschliesslich sinusförmige Signale** betrachtet. Wir nehmen für unsere Berechnungen also an, dass am Eingang einer Schaltung ausschliesslich sinusförmige Signale auftreten. Dies ist aber keine allzu strenge Einschränkung. Einerseits ist dies eine sehr häufige Anwendung und andererseits gilt es zu bedenken, dass jede periodische Funktion durch Überlagerung von (bis zu unendlich vielen) Sinusförmigen Funktionen erzeugt werden kann. Es lassen sich also auch nicht sinusförmige Eingangssignale auf sinusförmige zurückführen.

Phasoren sind eine Darstellung mit komplexen Zahlen für Sinusförmige Signale. In einem Phasor ist die **Amplitude** und die **Phase** eines Sinusförmigen Signals beschrieben. Die Frequenz eines Signals ist im Phasor selbst nicht drin.
Die Frequenz wird aber vom Netzwerk nicht verändert. Uns interessiert zudem, wie ein Netzwerk auf **alle** Frequenzen reagiert. Enthält das Netzwerk dynamische Elemente, deren Verhalten von der Frequenz abhängig ist, wird mit der komplexen Impedanz der dynamischen Elemente die Frequenz in die Berechnungen einfliessen.

Bemerkung: Zu den „sinusförmigen" Funktionen gehört natürlich auch die Cosinus-Funktion, die ja einer verschobenen Sinusfunktion entspricht.

Geometrische Interpretation der Phasoren

Denken wir uns einen Kreis mit Radius |A|. Wenn wir einen Punkt auf dem Kreis rotieren lassen und nur die y-Koordinate (Höhe) des Punktes betrachten und diese gegen die Zeit abtragen, so erhalten wir eine Sinusförmige Welle mit Amplitude |A|. Die Sinuswelle mit Amplitude ist also nichts anderes als die Projektion eines Zeigers (=Phasor), der um einen Kreis mit Radius |A| rotiert.



Der Zeiger auf der rechten Seite der Grafik enthält also alle Informationen, die wir zur vollständigen Beschreibung der Sinuswelle brauchen. Die Länge des Zeigers entspricht der Amplitude. Der Winkel des Zeigers gemessen zur positiven x-Achse entspricht der momentanen Phase der Sinuswelle und die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich der Zeiger im Gegenuhrzeigersinn dreht, entspricht der Frequenz der Sinuswelle.

Es ist nun offensichtlich, dass sich dieser Zeiger als komplexe Zahl in Polardarstellung durch $|A| \cdot e^{j\phi}$ darstellen lässt. Die Sinuswelle lässt sich also durch eine einzige Komplexe Zahl darstellen, wobei zusätzlich noch die Frequenz mitgeliefert werden muss. Diese Komplexe Zahl $A = |A| \cdot e^{j\phi}$ wird **Phasor** genannt.

Die Funktion $z(t) = A \cdot e^{j\omega t}$ enthält nun auch noch die Frequenz. Wenn wir mit Phasoren rechnen, benutzen wir aber meist nicht z(t), sondern ausschliesslich den Phasor A. Die zeitabhängige Funktion z(t) wird benötigt, um die mathematischen Herleitungen der benutzten Beziehungen darzustellen. Der Faktor $e^{j\omega t}$ entspricht der Rotation des Zeigers mit der Geschwindigkeit ω.

Rechnen mit Phasoren

Mit den Phasoren kann nun ganz normal wie mit **komplexen Zahlen** gerechnet werden. Darin steckt auch der Sinn der Phasoren, sie ersparen uns das Mitführen der langen und mühsamen Sinus/Cosinus-Ausdrücke. Eine Grosse Erleichterung beim Rechnen mit Phasoren ist die Tatsache, dass die **Ableitung der entsprechenden zeitabhängigen Funktion** einfach **einer Multiplikation des Phasors mit jω entspricht**. Soll am Schluss wieder die zeitabhängige sinusförmige Funktion aus dem Phasor gefunden werden, so ist dies mit **Realteilbildung** zu erreichen.

Die Zeitabhängige Funktion in Phasordarstellung:	$z(t) = \lvert A \rvert \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t} = A \cdot e^{jwt}$ mit $A = \lvert A \rvert \cdot e^{j\phi}$
Vom Phasor zur zeitabhängigen Funktion (durch Realteilbildung):	$x(t) = \Re\left\{A \cdot e^{j\omega t}\right\} = \lvert A \rvert \cdot \cos(\omega t + \phi)$
Ableiten nach der Zeit:	Multiplikation mit jω: $z'(t) = j\omega \cdot z(t)$

Komplexe Netzwerkelemente

So richtig nützlich sind die Phasoren erst, wenn wir damit nicht nur die Signale darstellen, sondern auch für die Elemente in den Schaltungen komplexe Zahlen verwenden. So lassen sich die dynamischen Elemente, statt wie im Zeitbereich mit einer Differenzialgleichung nun mit einer einzigen komplexen Zahl beschreiben. Diese Komplexe Zahl – der komplexe Widerstand, oder **Impedanz** – kann dann ganz einfach mit dem Ohmschen Gesetz in die Berechnungen mit einbezogen werden.

Damit können auch Gleichungen für **Vierpole** mit dynamischen Elementen aufgestellt werden. Die Vierpolmatrizen werden in diesem Fall natürlich auch komplex.

Meistens interessiert uns aber die **Übertragungsfunktion** eines Netzwerks, d.h., wie wird das Eingangssignal auf das Ausgangssignal übertragen. Wenn V_i die Eingangs-spannung ist und V_O die Ausgangsspannung, dann ist die Übertragungsfunktion H definiert als:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{V_O}{V_i}}$$ (abhängig von der Frequenz)

☐ Beispiel: Herleitung der Impedanz einer Kapazität C

Beim Kondensator gilt die Differentialgleichung $i_C = C \frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}$

Die Impedanz berechnet sich nach dem ohmschen Gesetz und führt wieder auf eine Differentialgleichung:

$$Z_C = \frac{v_C}{i_C} = \frac{v_C}{C \frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}}$$

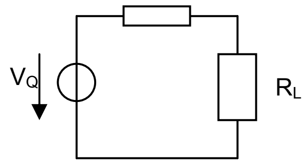
Wenn man nun annimmt, dass v_C und i_C sinusförmige Funktionen sind, so können wir diese mit Phasoren V_C und I_C ausdrücken (Phasoren gross geschrieben). Weil in der Phasorenschreibweise die Ableitung nach der Zeit durch eine Multiplikation mit jω geschrieben werden kann, lässt sich die Differentialgleichung umgehen:

$$Z_C = \frac{V_C}{I_C} = \frac{V_C}{C \cdot j\omega V_C} = \frac{1}{j\omega C}$$

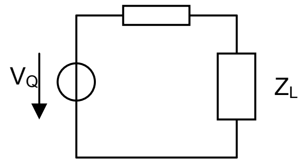
Genau gleich berechnet sich die Impedanz einer Spule: $Z_L = j\omega L$

Komplexe Leistungsanpassung

Unter Leistungsanpassung versteht man die Aufgabe, zu erzielen, dass bei gegebener Quelle möglichst viel von der Leistung der Quelle auf der Last abgebaut wird. Bisher haben wir gelernt, dass die Leistung über dem Lastwiderstand R_L maximal ist, wenn R_L gleich dem Innenwiderstand R_i der Quelle ist.



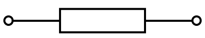
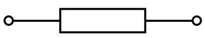
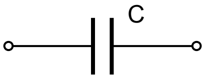
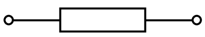
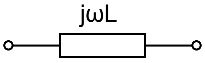
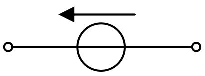
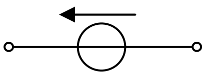
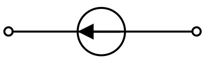
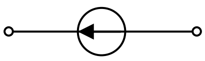
Wenn wir nun Komplexe Impedanzen haben, sowohl in der Quelle als auch in der Last, dann lautet die Regel ähnlich:



Die Leistung über der Lastimpedanz wird maximal, wenn die Lastimpedanz gleich der konjugiert komplexen Innenimpedanz der Quelle ist.

Darstellung eines Netzwerks mit Phasoren

Damit haben wir nun alle Informationen zusammen, um ein Netzwerk das nur sinusförmig Signalquellen enthält mit Phasoren zu beschreiben:

Netzwerkelement in zeitabhängiger Darstellung	**Ersatz für Darstellung mit Phasoren**
R  Widerstand	R  Bleibt gleich
C  Kapazität	$\frac{1}{j\omega C}$  Impedanz
L  Induktivität	$j\omega L$  Impedanz
$v_s(t)$  Signalquelle	V_s  Phasor
$i_s(t)$  Signalquelle	I_s  Phasor

Bode-Diagramme

Mit den Bode-Diagrammen wird die **Übertragungsfunktion graphisch dargestellt**. Es werden stets zwei Diagramme benötigt. Dies ist einfach ersichtlich, wenn man bedenkt, dass in einem Phasor zwei Informationen eines sinusförmigen Signals zusammengepackt sind (Amplitude und Phase). Sowohl **Amplitude und Phase werden in Funktion der Frequenz ω dargestellt**. Und weil das Übertragungsverhalten über mehrere Grössenordnungen von ω interessiert, wird die Frequenz in beiden Diagrammen logarithmisch abgetragen.

Im **Amplituden-Frequenzgang** wird dargestellt, mit welcher Verstärkung ein Signal mit der Frequenz ω vom Eingang an den Ausgang übertragen wird. Dies entspricht dem Betrag der Übertragungsfunktion in dB.

Im **Phasen-Frequenzgang** wird dargestellt, mit welcher Phasenverschiebung ein Signal mit der Frequenz ω vom Eingang an den Ausgang übertragen wird. Dies entspricht dem Argument der Übertragungsfunktion.

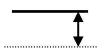
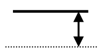
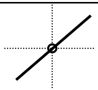
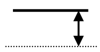
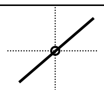
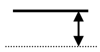
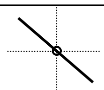
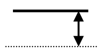
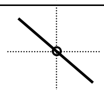
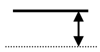
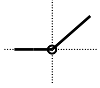
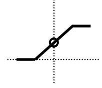
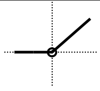
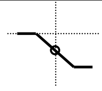
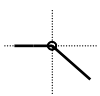
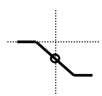
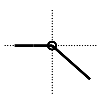
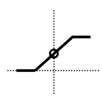
Die **Einheit Dezibel (dB)** die für die Darstellung des Amplituden-Frequenzganges verwendet wird, ist eine logarithmische Einheit. Es gilt:

$$\boxed{|H(j\omega)| \text{ in dB} = 20 \cdot \log |H(j\omega)|}$$

Diese Einheit wird vor allem verwendet, um Leistungen zu vergleichen.

Wenn wir die log-Funktion betrachten, wird klar, dass bei 0dB der Betrag der Übertragungsfunktion 1 ist, d.h. bei 0dB ist die Ausgangsspannung gleich gross wie die Eingangsspannung. Bei -20 dB ist die Ausgangsspannung 10 mal kleiner als die Eingangsspannung. (siehe dazu auch das Blatt „Die Verhältniseinheit Dezibel")

Elementare Übertragungsfunktionen und ihre Bode-Diagramme:
In der folgenden Tabelle sind wichtige Übertragungsfunktionen und ihre Bode-Diagramme dargestellt. Dabei ist jeweils ω_0 eine Konstante. Bei den kleinen Skizzen symbolisiert die waagrechte gestrichelte Linie jeweils 0dB bzw. 0rad. Die Senkrechte gestrichelte Linie symbolisiert die Frequenz ω_0.

Übertragungs-funktion $H(j\omega)$	**Amplituden-Frequenzgang** $\lvert H(j\omega)\rvert$ in dB	**Phasen-Frequenzgang** $\angle(H(j\omega))$
A (konstante)	 $20 \cdot \log\lvert A\rvert$	 $\begin{cases} \pi & \text{falls } A<0 \\ 0 & \text{falls } A>0 \end{cases}$
$j\frac{\omega}{\omega_0}$	 +20dB/Dekade, 0dB bei ω_0	 $\frac{\pi}{2}$
$-j\frac{\omega}{\omega_0}$	 +20dB/Dekade, 0dB bei ω_0	 $-\frac{\pi}{2}$
$j\frac{\omega_0}{\omega}$	 -20dB/Dekade, 0dB bei ω_0	 $\frac{\pi}{2}$
$-j\frac{\omega_0}{\omega}$	 -20dB/Dekade, 0dB bei ω_0	 $-\frac{\pi}{2}$
$\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$	 Knick bei ω_0, dann +20dB/Dekade	 $+\frac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\left(1-j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$	 Knick bei ω_0, dann +20dB/Dekade	 $-\frac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\frac{1}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$	 Knick bei ω_0, dann -20dB/Dekade	 $-\frac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\frac{1}{\left(1-j\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$	 Knick bei ω_0, dann -20dB/Dekade	 $+\frac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden

Um die Bode-Diagramme einer bestimmten Übertragungsfunktion zu zeichnen gibt es prinzipiell zwei Vorgehensweisen:

Die eine Möglichkeit besteht darin, mathematische Ausdrücke für Betrag und Phase der Übertragungsfunktion zu suchen die sich aufzeichnen lassen. Die andere Möglichkeit ist, die Übertragungsfunktion in Faktoren zu zerlegen, die in obiger Tabelle vorkommen. Dann werden für jeden Term einzeln die Diagramme gezeichnet. Eine praktische Eigenschaft der Logarithmusfunktion (die ja benutzt wird, um den Betrag in dB zu erhalten) ist, dass sich die Kurven der einzelnen Faktoren in den Bode-Diagrammen addieren.

Begründung: $\boxed{\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)}$ und $\boxed{e^{j\phi_a} \cdot e^{j\phi_b} = e^{j(\phi_a + \phi_b)}}$

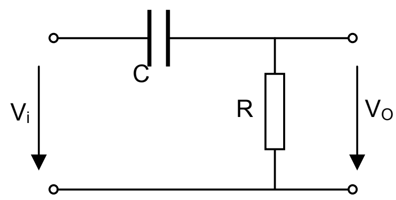
Schritt für Schritt zu den Bode-Diagrammen

- Zuerst wird das Netzwerk mit Komplexen Impedanzen/Admittanzen dargestellt. Dazu gehört die Voraussetzung, dass ausschliesslich sinusförmige Signale betrachtet werden.
- Mit Knoten- und Maschengleichungen einen Ausdruck suchen, in dem sowohl die Eingangs als auch die Ausgangsspannung vorkommen.
- Diesen Ausdruck auflösen nach der Übertragungsfunktion $H(j\omega) = \frac{V_O}{V_i} = \ldots$.
- Die Übertragungsfunktion umformen, so dass sie als Produkt von Faktoren, wie sie in der Tabelle oben vorkommen, dasteht. Zum Beispiel:

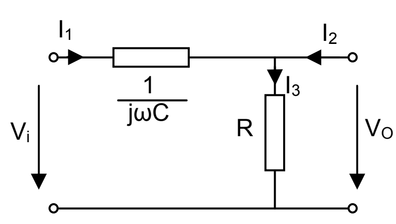
  $$H(j\omega) = \frac{A \cdot j\frac{\omega}{\omega_a} \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_b}\right) \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right) \cdots}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_d}\right) \cdot \left(1 - j\frac{\omega}{\omega_e}\right) \cdots}$$ wobei ω_a, ω_b, ω_c,… Konstanten sind.

  Für diese Umformungen kann auch die Beziehung $\boxed{-j = \frac{1}{j}}$ genutzt werden.
- Die Frequenzen ω_a, ω_b, ω_c,… sind die so genannten Knickfrequenzen. Wenn man die Diagramme zeichnet, sollte man darauf achten, dass diese Frequenzen im dargestellten Bereich liegen (Beschriftung der Frequenzachse).
- Für jeden Faktor einzeln die Kurve zeichnen nach der Tabelle.
- Sowohl beim Amplituden-Frequenzgang als auch beim Phasen-Frequenzgang die Kurven der einzelnen Faktoren addieren.
- Für die Grenzfälle $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ lassen sich Betrag und Phase der Übertragungsfunktion meist einfach Ausrechnen. Dies kann als Hilfe zum Zeichnen der Bode-Diagramme oder auch als Kontrolle verwendet werden.

☐ Beispiel: Übertragungsfunktion und Bode-Diagramme



Die folgende Schaltung enthält einen Widerstand und einen Kondensator in Serie. Zur Berechnung der Übertragungsfunktion wird hier angenommen, dass am Ausgang kein Strom fliesst.



Da wir nur sinusförmige Signale betrachten, können wir Spannungen als **Phasoren** darstellen. Zudem lässt sich der Kondensator durch seine komplexe Impedanz ersetzen. Zur übersichtlichen Berechnung wurden noch Ströme (ebenfalls als Phasoren) eingeführt und beschriftet. Gesucht ist zuerst die Übertragungsfunktion.

Weil am Ausgang kein Strom fliesst, ist $I_2=0$.
Es folgt daraus, dass der Strom I_3 also gleich I_1 ist

(Knotenregel). Mit anderen Worten: der Strom I_1 fliesst durch den Kondensator und dann durch den Widerstand und wieder beim Eingang raus. Sonst fliessen keine Ströme. Wir haben also einen **Spannungsteiler**: $V_O = \dfrac{R}{\dfrac{1}{j\omega C} + R} \cdot V_i$

Die **Übertragungsfunktion** lautet folglich: $H(j\omega) = \dfrac{V_O}{V_i} = \dfrac{R}{\dfrac{1}{j\omega C} + R}$

Nun sollen für diese Übertragungsfunktion die **Bode-Diagramme** gezeichnet werden. Dazu sollen die numerischen Werte R=100Ω und C=100µF verwendet werden.

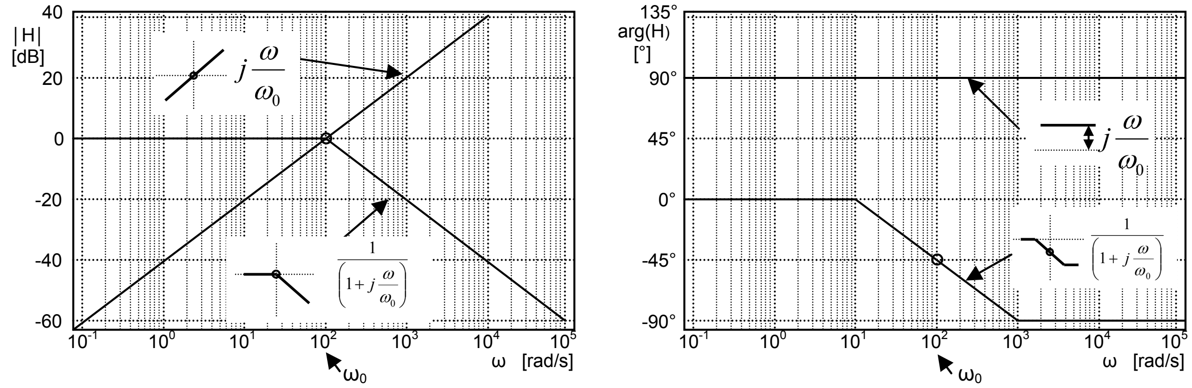
Die Übertragungsfunktion wird erweitert mit $j\omega C$: $H(j\omega) = \dfrac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$

und mit $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$: $H(j\omega) = \dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}$

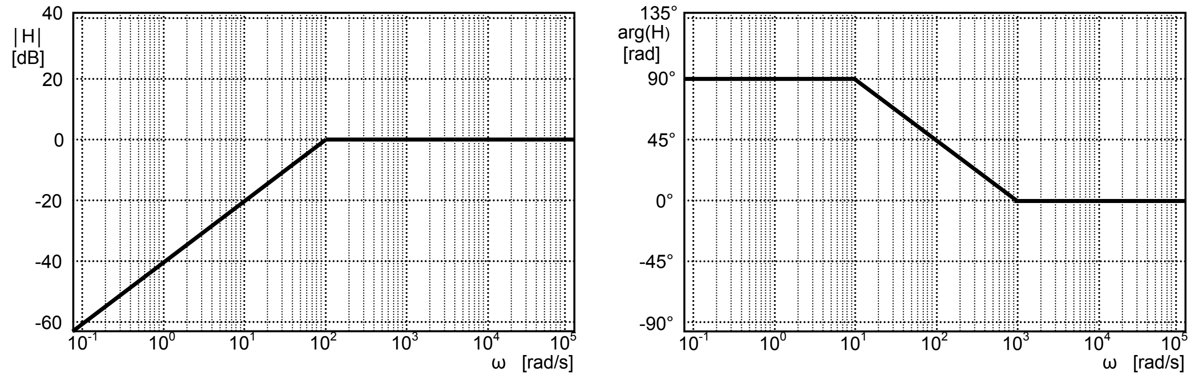
In dieser Form ist die Übertragungsfunktion ein Produkt von Termen, die wir in der Tabelle oben wieder finden.

Der numerische Wert für die Knickfrequenz: $\omega_0 = \dfrac{1}{100 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 100$

Damit lassen sich die Kurven für die einzelnen Faktoren zeichnen:



Nun müssen die Kurven der einzelnen Faktoren nur noch aufaddiert werden:



Diese Linien entsprechen nun den **Asymptoten** der eigentlichen Kurven, die leicht abgerundet verlaufen und sich diesen Geraden asymptotisch nähern würden. Wir wissen auch, dass die Kurve bei der Knickfrequenz ω_0 bereits um 3dB von der waagrechten Asymptote Abweicht.

Wem das alles zu theoretisch war, hier noch einmal in Worten, was diese Bode-Diagramme aussagen:
Im linken Diagramm sehen wir, dass tiefe Frequenzen gedämpft werden und Frequenzen, die grösser als 10^2 rad/s sind, unverändert an den Ausgang weitergegeben werden. Die Schaltung ist also ein **Hochpass**.
Im rechten Diagramm sehen wir, dass Signale mit Frequenzen, die kleiner sind als 10 rad/s, mit einer Phasenverschiebung von +90° (oder ½π) an den Ausgang weitergegeben werden. Frequenzen die grösser als 10^3 sind, werden ohne Phasenverschiebung an den Ausgang weitergegeben.